Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele VII-VIII
27 octombrie 2013

Soluţii

RUNDA a IV-a

Problema 1. Fie M mulţimea multiplilor lui 36 în a căror scriere în baza 10 nu apar alte cifre decât 4, 6 sau 9. Câte numere cel mult egale cu 100000 conţine M ?

Soluţie: Elementele mulţimii M cu cel mult 5 cifre se divid cu 4 şi cu 9 şi se termină în 44 sau 64 sau 96 şi suma cifrelor 9,18,27,sau 36. Notăm cu s suma tuturor cifrelor afară de ultimele două cifre ale unui număr din M.

Dacă un număr se termină în 44, atunci $s \in \{10,19\}$. Suma10 se formează din 4+6, iar 19=4+6+9. Obţinem 2+6=8 elemente.

Dacă un număr se termină în 64, atunci $s \in \{8,17\}$. Suma 8 se formează din 4+4, iar 17=4+4+9. Obţinem 1+3=4 elemente.

Dacă un număr se termină în 96, atunci $s \in \{12,21\}$. Suma 12 se formează din 4+4+4=6+6, iar 21=6+6+9. Obţinem 1+1+3=5 elemente.

În total sunt 8+4+5= 17 elemente cu proprietatea căutată.

Răspuns: 17 elemente

Problema 2. Să se determine numerele de forma $\overline{abcde}$ scrise în baza10, cu cifre nu neapărat distincte, ştiind că verifică relaţia $\overline{abcde} = 3 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cde}$.

Soluţie: Deoarece $\overline{abcde} = 1000 \cdot \overline{ab} + \overline{cde}$, cu notaţiile $x = \overline{ab}, y = \overline{cde}$, ecuaţia din enunţ se scrie: $1000 \cdot x + y = 3xy$. Înmulţim relaţia cu 3, obţinem

$9xy - 3000x - 3y = 0 \Leftrightarrow (3x-1)\cdot(3y-1000) = 1000.$

Cum $10 \le x \le 99 \Rightarrow 29 \le 3x-1 \le 296.$ Singurii divizori ai lui 1000 care verifică aceste condiţii sunt 50,125,200;

$3x-1 = 50 \Rightarrow x = 17, y = 340 \Rightarrow \overline{abcde} = 17340$

Dacă $3x-1 = 125 \Rightarrow x = 42, y = 336 \Rightarrow \overline{abcde} = 42336$

Dacă $3x-1 = 200 \Rightarrow x = 67, y = 335 \Rightarrow \overline{abcde} = 67335$

Răspuns: $\overline{abcde} \in \{17340, 42336, 67335\}$.

Problema 3. Pe fiecare latură a unui patrulater convex se consideră n puncte, $n \ge 2$ (diferite de vârfuri) şi se notează cu T_n numărul triunghiurilor care se pot forma, având vârfurile printre cele $4 \cdot n$ puncte considerate. Să se determine cea mai mică valoare a lui n pentru care $T_n > 2013$.

Soluţie: Triunghiurile se pot clasifica în două categorii:

1. Două vârfuri sunt pe o latură, iar al treilea vârf pe o altă latură a patrulaterului. Două vârfuri situate pe o latură se pot alege în $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ moduri. Pe celelalte 3 laturi sunt 3n puncte, deci al treilea vârf se poate alege în 3n moduri. Rezultă că sunt $4\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot 3n = 6n^2\cdot(n-1)$
2. Vârfurile unui triunghi sunt situate pe laturi distincte. Trei laturi ale patrulaterului se pot alege în 4 moduri, deci vor fi $4\cdot n^3$ triunghiuri.

În concluzie,

$T_n = 6\cdot n^2\cdot(n-1)+4n^3 = 2n^2\cdot(5n-3)$;

$T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 < 2013, T_7 = 3136 > 2013$.

Răspuns: n=**7**